El problema de Serre

Cátedra Emblemática José Granés 2008-I

1 El problema

En la página 243 del famoso artículo *Faisceaux algébriques coherents*, Ann. of Math. (2) 61 (1955), 197-278.

Serre planteó el siguiente problema:

On ignore s'il des A-modules projectifs de type fini qui ne soient pas libres " ($A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbb{K}$ *corp*).

¿Todo módulo proyectivo finitamente generado sobre un anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo es libre?

2 El problema y su relación con temas elementales

- módulo $M \sim$ espacio vectorial V
- anillo $A \sim$ cuerpo $\mathbb{K}$
- módulo libre := módulo con una base
- módulo proyectivo f.g := sumando directo de un módulo libre de dimensión finita,

$$M \oplus M' \cong A^n$$

- Todo espacio vectorial es libre,

$$V \cong \mathbb{K}^n,$$

  es decir, $V' = 0$. En la prueba se utiliza que cada elemento no nulo de $\mathbb{K}$ es inversible.

- Para el anillo $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, ¿todo módulo proyectivo f.g es libre? es decir, ¿$M' = 0$?

3 Avances

- Para una variable, $A = \mathbb{K}[x]$: ✓
  En un DIP,

  $$\text{proyectivo f.g} = \text{sin torsión} = \text{libre}$$

  $(\lambda.v = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } v = 0)$

- Para dos variables, $A = \mathbb{K}[x, y]$: ✓

  Seshadri (1958)

- Para n variables: avance presentado por el mismo Serre en 1958,

  $$\textit{Teorema de Serre}: M \oplus A^m \cong A^n,$$

  es decir, el complemento de M es libre, $M' \cong A^m$.

4 La solución completa

- *David Quillen*, Enero de 1976, Estados Unidos:
  Proyective modules over polynomial rings, Invent. Math., 36, 1976, 167-171.
- *Andrei Suslin*, Enero de 1976, San Petersburgo:
  Proyective modules over polynomial rings are free, Soviet Math. Dokl., 17, 1976, 1160-1164.

5 La solución moderna

Las soluciones de Quillen y Suslin usan como técnica el *álgebra homológica y la K-teoría*.

Las soluciones no exhiben de manera explícita la base de M.

El avance de Serre mostró un camino para encontrar una solución *simple y efectiva*:

$$M \oplus A^m \cong A^n \Rightarrow M = \ker(F)$$
$$A^n \xrightarrow{F} A^m$$

M es libre de dimensión $n - m$ si, y sólo si, existe una matriz $U \in GL_n(A)$ tal que $FU = \begin{bmatrix} I_m & \mid & 0 \end{bmatrix}$. En tal caso, las últimas $n-m$ columnas de U conforman una base de M (*Logar y Sturmfels, 1992*).

References

[1] **Lam, T.Y.**, *Serre's Problem on Projective Modules* , Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2006.

[2] **Logar, A. and Sturmfels, B.**, *Algorithms for the Quillen-Suslin theorem*, J. of Algebra, 145, No. 1, 1992.

[3] **Quillen, D.**, *Proyective modules over polynomial rings*, Invent. Math., 36, 1976, 167-171.

[4] **Serre, J.P.**, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. Math., 61, 1955, 191-278.

[5] **Suslin, A.A.**, *Proyective modules over polynomial rings are free*, Soviet Math. Dokl., 17, 1976, 1160-1164.

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia
e-mail: `jolezamas@unal.edu.co`